期中考试试卷解析

一、 单项选择题

1.解：$\because F'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)dt$

又$\because x\to 0$时，$F'(x)$与x^k是同阶无穷小

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)dt}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)dt}{x^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

$\because f'(0)\neq 0$，要使二者互为同阶无穷小，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}=c\neq 0$

则应满足$k=3$，此时极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f'(x)}{2}=f'(0)\neq 0$

2. 解：当$|x|<1$时，$\sqrt[n]{1}\leq\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\leq\sqrt[n]{2}$，

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$

当$|x|=1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=1$

当$|x|>1$时，$\sqrt[n]{|x|^{3n}}\leq\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\leq\sqrt[n]{2|x|^{3n}}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^{3n}}=|x|^3,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=|x|^3$，由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=|x|^3$

综上所述：$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ |x|^3, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}-x^3, & x<-1\\ 1, & -1\leq x\leq 1\\ x^3, & x>1\end{cases}$

所以函数$f(x)$恰有两个不可导点

3.由题意知：间断点为$x=0,x=1,x=\dfrac{\pi}{2},x=-\dfrac{\pi}{2}$

依次求极限得：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\frac{e}{-e}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e(e^{\frac{1}{x}-1}+1)}{e(e^{\frac{1}{x}-1}+1)}=1$$

$\therefore \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$， $x=0$是第一类间断点中的跳跃间断点

4. 对于 A、C：

$\because f(x)$在$x=0$处连续且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则 $f(0)=0, f'(0)=A$

故 A、C 均正确

对于 B：

$\because \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，$\therefore \lim_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=f(0)+f(0)=2f(0)=0$

对于 D：

取反例 $f(x)=|x|$，此时 $f(x)$在$x=0$处连续，

且满足$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0$

但 $f(x)$在$x=0$处不可导，故 $f'(0)$不存在

故本题选 D.

5.取特值$\alpha=1$得：$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x<e \\ \frac{1}{x\ln^2 x}, & x\geq e\end{cases}$

则$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_1^e dx+\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=e$，收敛，故排除 A、B、C，选$D$

一、 填空题

6. 解：$\because \lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}=3, \therefore f(-2)=0, f'(-2)=3$

$\because f(x)$是周期为 2 的周期函数，$\therefore f(0)=f(-2)=0, f'(0)=f'(-2)=3$

$\therefore$切线方程： $y-0=3(x-0)$，即 $y=3x$

7. 解：$\because f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}=\ln\frac{x^2-1+1}{x^2-1-1}$

$\therefore f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}, f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}$

$\because f[\varphi(x)]=\ln x, \therefore \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=1, \varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$

$\therefore \int\varphi(x)dx=\int\frac{x+1}{x-1}dx=\int\frac{x-1+2}{x-1}dx=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx=x+2\ln|x-1|+C$

8. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+\sin x}{\cos x-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{\cos x}{x^2}-1}=-2$

水平渐近线为： $y=-2$

9. 解：$\because \frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$

令 $F(t,y)=2y-ty^2+e^t-5$

$\therefore \frac{dy}{dt}=-\frac{F_t}{F_y}=-\frac{-y^2+e^t}{2-2ty}=\frac{y^2-e^t}{2(1-ty)}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y^2-e^t}{2(1-ty)}}{\frac{1}{1+t^2}}=\frac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$

10.解：$\because y=2^x, y'=2^x\ln x$ 且且与曲线 $y=2^x$ 在 $(1,2)$ 处相切

$\therefore f'(1)=2\ln 2$

$\int_0^1 xf''(x)dx=\int_0^1 xd[f'(x)]=xf'(x)\big|_0^1-\int_0^1 f'(x)dx=f'(1)-0-f(x)\big|_0^1$

$=2\ln 2-f(1)+f(0)=2\ln 2-2$

二、 计算题

11.解：$\because \lim_{x\to 0}(ax-\sin x)=0$ 且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq 0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0$，此时 $b=0$

又 $\because \lim_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{x^2}=c(c\neq 0)$，此时 $a=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}=c$

综上所述：$a=1, b=0, c=\dfrac{1}{2}$

12.解：（1）当 $x>1$ 时，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2\cdot 3^{-n(x-1)}+2}{x+3^{-n(x-1)}}=\dfrac{0+2}{x+1}=\dfrac{2}{x}$

当 $x=1$ 时，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2\cdot 3^{-n(x-1)}+2}{x+3^{-n(x-1)}}=\dfrac{1+2}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

当 $x<1$ 时，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2\cdot 3^{-n(x-1)}+2}{x+3^{-n(x-1)}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2+\frac{2}{3^{-n(x-1)}}}{\frac{x}{3^{-n(x-1)}}+1}=x^2$

综上所述：$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ \dfrac{3}{2}, & x=1 \\ \dfrac{2}{x}, & x>1 \end{cases}$

（2）$\because \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1, \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{2}{x}=2$

$\therefore \lim_{x\to 1^-}f(x)\neq \lim_{x\to 1^+}f(x)$

$\therefore x=1$ 是跳跃间断点

13.解：令 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\cos^p x+\sin^p x}dx$，其中 $p>0$

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$,则 $I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^p(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos^p(\frac{\pi}{2}-t)+\sin^p(\frac{\pi}{2}-t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^p t}{\sin^p t+\cos^p t}dt$

所以 $I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p t+\cos^p t}{\sin^p t+\cos^p t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

又 $\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\arctan x=\frac{\pi}{4}$

$\therefore \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\frac{\pi}{4}$

所以只需要 $p>0$，即可使得 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 连续

14. 解：当 $x=0$ 时， $f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{g(x)-e^{-x}}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}$$

当 $x\neq0$ 时， $f'(x)=\frac{x\left(g'(x)+e^{-x}\right)-g(x)+e^{-x}}{x^2}=\frac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}$

综上所述： $f'(x)=\begin{cases}\frac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}, & x\neq0\\ \frac{g''(0)-1}{2}, & x=0\end{cases}$

$\because \lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+xg''(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}-g'(x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xg''(x)-xe^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$$

即：$\lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0)$

$\therefore f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的连续

15．解：两边同时对x求导得：$f'(x)g[f(x)]=2xe^{x}+x^{2}e^{x}$

$\because f(x)$的反函数是$g(x)$，$\therefore g[f(x)]=x$

$\therefore xf'(x)=2xe^{x}+x^{2}e^{x}, f'(x)=2e^{x}+xe^{x}$

$\therefore f(x)=2e^{x}+xe^{x}-e^{x}+C=e^{x}+xe^{x}+C$

$\because f(x)$在$\left[0,+\infty\right)$上可导，$\therefore f(x)$在$x=0$处连续

$\because \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(e^{x}+xe^{x}+C)=1+C$ 且 $f(0)=0$

$\therefore 1+C=0, C=-1$

$\therefore f(x)=xe^{x}+e^{x}-1$

16. 解：令$u=\sin^{2}x$，则$\sin x=\sqrt{u}, x=\arcsin\sqrt{u}$

$$\therefore f(u)=\frac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$$

$$\therefore \int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$$

令$\sqrt{x}=\sin t$，则$x=\sin^{2}t, dx=2\sin t\cos t dt$

原式$=\int\frac{t}{\cos t}\cdot 2\sin t\cos t dt=2\int t\sin t dt=-2\int t d(\cos t)=-2t\cos t+2\sin t+C$

$$=2[-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x}]+C$$

17.解：两边同时对x求导得：$tf(xt)=tf(x)+\int_1^t f(u)du$

令$x=1$得：$tf(t)=tf(1)+\int_1^t f(u)du$

$\because f(1)=\dfrac{5}{2}$，$\therefore tf(t)=\dfrac{5}{2}t+\int_1^t f(u)du$

两边同时对t求导得：$f(t)+tf'(t)=\dfrac{5}{2}+f(t)$

$\therefore tf'(t)=\dfrac{5}{2}, f'(t)=\dfrac{5}{2t}, f(t)=\dfrac{5}{2}\ln|t|+C$

$\because f(1)=\dfrac{5}{2}$，$\therefore \dfrac{5}{2}=0+C, C=\dfrac{5}{2}$

$\therefore f(x)=\dfrac{5}{2}(\ln x+1)$

18. 解：$\because F(x)$为$f(x)$的原函数，$\therefore F'(x)=f(x)\ \therefore F'(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$

$$\therefore \int F'(x)F(x)dx=\int\frac{xe^x}{2(1+x)^2}dx$$

$$\therefore \frac{1}{2}F^2(x)=-\frac{1}{2}\left[xe^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)\right]=-\frac{1}{2}\left(\frac{xe^x}{1+x}-\int\frac{e^x+xe^x}{1+x}dx\right)dx$$

$$F^2(x)=-\left(\frac{xe^x}{1+x}-\int e^x dx\right)=-\frac{xe^x}{1+x}+e^x+C$$

$\therefore F(x)=\sqrt{C-\dfrac{xe^x}{1+x}+e^x}$（舍负值）

$\because F(0)=1$，$1=\sqrt{C-0+1}, C=0\ \therefore F(x)=\sqrt{-\dfrac{xe^x}{1+x}+e^x}=\sqrt{\dfrac{e^x}{1+x}}$

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{e^x}{1+x}}}\cdot\frac{e^x(1+x)-xe^x}{(1+x)^2}=\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{e^x}}\cdot\frac{e^x}{(1+x)^2}=\frac{x\sqrt{e^x}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

三、 应用题

19.解：（1）由题意得：$-\frac{p}{Q}\cdot Q'=\frac{P}{120-P}$

$$\therefore\int\frac{dQ}{Q}=-\int\frac{1}{120-p}dp\Rightarrow\ln Q=\ln(120-p)+\ln C_1=\ln C(120-P)$$

$\therefore Q=C(120-p)$，$\because$ 最大需求量为 1200，$\therefore C=10$

需求函数：$Q=1200-10p$

（2）由（1）知，$p=120-\frac{1}{10}Q$，收益函数为 $R=pQ=120Q-\frac{1}{10}Q^2$

边际收益 $R'=120-\frac{1}{5}Q$

当 $p=100$ 时，$Q=200$，此时边际收益为 $R'(200)=80$

经济意义：销售第 201 件商品所得的收益为 80 万元

20. 解：$\because xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2,\therefore f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{3a}{2}x$

$$\therefore f(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{3a}{2}x\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=e^{\ln x}\left(\int\frac{3ax}{2}\cdot e^{-\ln x}dx+C\right)$$

$$=x\left(\int\frac{3a}{2}dx+C\right)=x\left(\frac{3a}{2}x+C\right)$$

由题意得：$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{3a}{2}x^2+Cx\right)dx=\left(\frac{a}{2}x^3+\frac{C}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{a}{2}+\frac{C}{2}=2$

$\therefore a+C=4,C=4-a, f(x)=\dfrac{3a}{2}x^2+(4-a)x$

$\therefore V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1\left[\dfrac{3a}{2}x^2+(4-a)x\right]^2dx$

$=\pi\int_0^1\left[\dfrac{9a^2}{4}x^4+2\cdot\dfrac{3a}{2}x^2\cdot(4-a)x+(16-8a+a^2)x^2\right]dx$

$=\pi\int_0^1\left[\dfrac{9a^2}{4}x^4+(12a-3a^2)x^3+(16-8a+a^2)x^2\right]dx$

$=\pi\left(\dfrac{9a^2}{20}x^5+\dfrac{12a-3a^2}{4}x^4+\dfrac{16-8a+a^2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1$

$=\pi\left(\dfrac{9a^2}{20}+\dfrac{12a-3a^2}{4}+\dfrac{16-8a+a^2}{3}\right)$

$=\pi\left(\dfrac{9}{20}a^2+3a-\dfrac{3}{4}a^2+\dfrac{16}{3}-\dfrac{8}{3}a+\dfrac{1}{3}a^2\right)$

$=\pi\left(\dfrac{1}{30}a^2+\dfrac{1}{3}a+\dfrac{16}{3}\right)$

令$V(a)=\pi\left(\dfrac{1}{30}a^2+\dfrac{1}{3}a+\dfrac{16}{3}\right)$， $\therefore V'(a)=\pi\left(\dfrac{1}{15}a+\dfrac{1}{3}\right),V''(a)=\dfrac{\pi}{15}>0$，

令$V'(a)=0$得$a=-5$，$\because V''(-5)=\dfrac{\pi}{15}>0$

$\therefore a=-5$是唯一极小值点，也即最小值点

$\therefore a=-5$时，图形S绕x轴旋转一周所得的旋转体的体积最小

四、 证明题

21.证明：令$F(x)=f(x)-\mu x$

$\because f_+'(a)\neq f_-'(b)$，我们假设$f_+'(a)<f_-'(b)$

又$\because F(x)$在$[a,b]$上可导，且$F_+'(a)=f_+'(a)-\mu<0,F_-'(b)=f_-'(b)-\mu>0$

$$\therefore \begin{cases} F'_{+}(a)=\lim\limits_{x\to a^{+}}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0 \\ F'_{-}(b)=\lim\limits_{x\to b^{-}}\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}>0 \end{cases}$$

由极限的保号性知：

在$x=a$某个右邻域内，$\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$，即$F(x)<F(a)$

在$x=b$某个左邻域内，$\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}>0$，即$F(x)<F(b)$

$\therefore F(a),F(b)$均不是$F(x)$在闭区间$[a,b]$上的最小值

设$F(x)$在开区间(a,b)内的最小值点为ξ，则$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=\mu$