期末考试试卷解析

1．解：$\because x\to 0^+$ 时 $a_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim -\frac{1}{2}x^2$，$a_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim x^{\frac{5}{6}}$ ，

$$a_3=\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x$$

$\therefore$ 故选 B.

2．解：当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}=ax+b$

当 $x=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}=\frac{a+b+1}{2}$

当 $x=-1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}=\frac{b-a-1}{2}$

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{ax+b}{x^{2n-1}}}{x+\frac{1}{x^{2n-1}}}=\frac{1}{x}$

综上所述：$f(x)=\begin{cases}ax+b, & |x|<1\\ \frac{a+b+1}{2}, & x=1\\ \frac{b-a-1}{2}, & x=-1\\ \frac{1}{x}, & |x|>1\end{cases}$

$\because \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b,\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{x}=-1,\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(ax+b)=b-a$

要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则应满足 $\begin{cases}a+b=1\\ b-a=-1\end{cases}$，即 $\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$

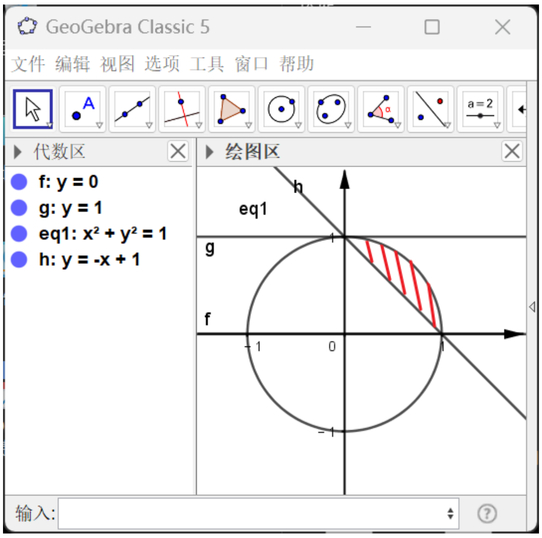
故选 A

3.解：对于 A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

对于 B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|(x+1)}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1$

对于 C. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty$，故选 C

4.先画出 $y=0, y=1, x^2+y^2=1, y=1-x$ 四条边界，如下图所示



将其化为直角坐标系为 $\int_{-1}^{0}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}f(x,y)dy$

化为极坐标系为 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta+r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_{0}^{1}f(r\cos\theta+r\sin\theta)rdr$

5.解：$\because n\to\infty$ 时，$\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^a}\sim\frac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}$，又$\because \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^a}$ 绝对收敛，$\therefore \alpha-\frac{1}{2}>1$，

即 $a>\frac{3}{2}$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-a}}$ 条件收敛，$\therefore 2-a>0$，即 $a<2$

综上所述：$\frac{3}{2}<a<2$

6.解：$\because f(x^2-2x+2)$ 定义域是 $[0,3]$，$\therefore 0\le x\le 3$

又 $\because x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

令 $y=(x-1)^2+1$，则在区间 $[0,3]$ 上，$y_{\min}=1, y_{\max}=5$

$\therefore 1\le x^2-2x+2\le 5$

$\therefore f(x)$ 定义域为 $[1,5]$

7. 解：由题意知： $y(0)=1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=f'(0)$$

令 $F(x,y)=y-x-e^{x(1-y)}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{-1-(1-y)e^{x(1-y)}}{1+xe^{x(1-y)}}$$

$$\therefore f'(0)=-\frac{-1-0}{1}=1$$

8. 解： $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2}dx=-\int_0^{+\infty}xd\left(\frac{1}{1+e^x}\right)=-\frac{x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx$

$$=0+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=\ln 2$$

9.解：方程两边同时对 x 求偏导得： $z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}=2xf(x-z,y)+x^2\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_1'$

将 $x=0,y=1$ 代入得 $z=1$， $\therefore 1+\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial x}=-1$

方程两边同时对 y 求偏导得： $z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}=x^2\left(-\frac{\partial z}{\partial y}f_1'+f_2'\right)$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入， $\therefore \frac{\partial z}{\partial y}-2=0,\frac{\partial z}{\partial y}=2$

$$\therefore dz\Big|_{(0,1)}=-dx+2dy$$

10.解： $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 d\left[f'(2x)\right]=\frac{1}{2}x^2 f'(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(2x)dx$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}\int_0^1 xd\left[f(2x)\right]=-\frac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}f(2)+\int_0^2 f(2x)d(2x)=-1+1=0$$

11.解：

$$\because \lim_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})(3x+\sqrt{ax^2+bx+1})}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-(ax^2+bx+1)}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x^2-bx-1}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}=3$$

$$\begin{cases}9-a=0\\ \dfrac{-b}{3+\sqrt{a}}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=9\\ b=-18\end{cases}$$

12.解：假设$k\le 0$，发现$\lim\limits_{x\to 0^+}x^k\sin\dfrac{1}{x}$不存在，所以$k>0$

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可微，而$f(x)$在$(-\infty,0),(0,+\infty)$处处连续

$\therefore$只需要讨论$f(x)$在$x=0$处连续可导即可

$$\because \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a\sin^2 x+b\sin x+c)=c,\ f(0)=0$$

$\therefore c=0$

$$又\because f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^k\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x^{k-1}\sin\frac{1}{x}$$

要使$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}$存在，则$k$应满足$k>1$，此时$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}=0$

$$\because f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 1^-}\frac{a\sin^2 x+b\sin x+c-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\sin^2 x+b\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(a\sin x+b)=b$$

$\therefore b=0$

将$b=0,c=0$代入原函数得：$f(x)=\begin{cases} a\sin^2 x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^k\sin\frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$

此时导函数为：$f'(x)=\begin{cases} a\sin 2x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ kx^{k-1}\sin\frac{1}{x}-x^{k-2}\cos\frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$

若$k\le 2$，则$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{k-2}\sin\frac{1}{x}$不存在，则$k$应满足$k>2$，此时$a$为任意常数

综上所述：a为任意常数，$b=0,c=0,k>2$

13．解：令$x=\tan u$，则$dx=\sec^2 udu$

$$\therefore \text{原式}=\int\frac{\sec^2 udu}{(2\tan^2 u+1)\sec u}=\int\frac{\sec u}{2\tan^2 u+1}du=\int\frac{\frac{1}{\cos u}}{\frac{2\sin^2 u}{\cos^2 u}+1}du$$

$$=\int\frac{\cos u}{2\sin^2 u+\cos^2 u}du=\int\frac{d(\sin u)}{\sin^2 u+1}$$

$$=\arctan(\sin u)+C=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C$$

14.解：当$-1\le x<0$时

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{x}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)dt=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Bigg|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}$$

当$0\le x<1$时

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)dt+\int_0^x\frac{te^x}{(e^t+1)^2}dt=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{0}-\int_0^x td\left(\frac{1}{e^t+1}\right)$$

$$=-1+\frac{1}{2}-\frac{t}{e^t+1}\Big|_0^x+\int_0^x\frac{1}{e^t+1}dt=\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}-\ln(1+e^{-x})\Big|_0^x=\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}-\ln(1+e^{-x})\Big|_0^x$$

$$=\ln\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{x}{e^x+1}+\ln 2-\frac{1}{2}$$

综上所述：$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}, & -1\le x<0\\ \ln\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{x}{e^x+1}+\ln 2-\frac{1}{2}, & 0\le x<1\end{cases}$

15. 解：$\because \vec{s}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=\{0,-1,-1\}$

$$\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=\{1,-2,-3\}$$

又$\because \vec{n}\perp\vec{s}_1,\vec{n}\perp\vec{s}_2$

$$\therefore \vec{n}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=\{1,-1,1\}$$

$\therefore$由点法式方程得：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$

16. 解：$\because$ $y''-y=0$的特征方程为$\lambda^2-1=0$,即$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$

其所对应齐次微分方程的通解为$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

对于$y''-y=e^{-x}$，$\because \lambda=-1$是特征根，设其特解为$y_1^*=Axe^{-x}$.

代入方程得$\left(y_1^*\right)''-y_1^*=Ae^{-x}-Axe^{-x}=-2Ae^{-x}=e^{-x}$，$\therefore A=-\frac{1}{2}$，即：$y_1^*=-\frac{1}{2}xe^{-x}$

对于$y''-y=\sin x$，$\because \lambda=-1,\lambda=1$不是特征根，设其特解为$y_2^*=B\cos x+C\sin x$

代入方程得$\left(y_2^*\right)''-y_2^*=-2B\cos x-2C\sin x=\sin x$，$\therefore B=0,C=-\frac{1}{2}$，即：$y_2^*=-\frac{1}{2}\sin x$

综上所述：原微分方程通解为$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$

17. 解：$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta=\iint_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}rdr$

$$=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}dy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^x\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2+y^2}d(1-x^2+y^2)\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 udu=\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{3}{16}\pi$$

18. 解：记$u_n(x)=\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n(2n-1)}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}}\right|=x^2$$

令$x^2<1$得收敛区间$(-1,1)$

当$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$收敛；当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$收敛

$\therefore$收敛域：$[-1,1]$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$，其中 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$

$$\therefore S_1'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$S_1''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}\right)'$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}=\frac{2}{1+x^2}$$

$$\therefore S'(x)=S_1'(0)+\int_0^x S_1''(t)dt=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}dt=2\arctan x$$

$$S_1(x)=S(0)+\int_0^x S_1'(t)dt=2\int_0^x\arctan t dt=2\left[t\arctan t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{2t}{1+t^2}dt\right]$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$

$$\therefore S(x)=xS_1(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),-1\le x\le 1$$

19.解：由题意得：定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{-2x(1+x^2)-4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-1,x_2=1$；　$f''(x)=0$ 得 $x_3=-\sqrt{3},x_4=0,x=\sqrt{3}$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

单增区间：$[-1,1]$

单减区间：$(-\infty,-1],[1,+\infty)$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凸	拐点	凹	拐点	凸	拐点	凹

凸区间：$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right],\left[0,\sqrt{3}\right]$

凹区间：$\left[-\sqrt{3},0\right],\left[\sqrt{3},+\infty\right)$

$\because f(-\sqrt{3})=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}, f(0)=0, f(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore$ 拐点：$\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right),(0,0),\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\because \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$

$\therefore y=0$ 为水平渐近线

20.解：由 $\begin{cases} y=ax^2 \\ y=1-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}} \\ y=\dfrac{a}{1+a} \end{cases}$（舍负值）

$$\therefore k=\frac{\frac{a}{1+a}}{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{a}{\sqrt{1+a}}，\therefore \text{直线} OA \text{的方程为} y=\frac{a}{\sqrt{1+a}}x$$

$$\therefore V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\left[\left(\frac{ax}{\sqrt{1+a}}\right)^2-(ax^2)^2\right]dx=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)dx=\pi\left(\frac{a^2x^3}{3(1+a)}-\frac{a^2x^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}$$

$$=\pi\left[\frac{\frac{a^2}{(a+1)\sqrt{a+1}}}{3(a+1)}-\frac{\frac{a^2}{(a+1)^2\sqrt{a+1}}}{5}\right]=\pi\left[\frac{a^2}{3(a+1)^2\sqrt{a+1}}-\frac{a^2}{5(a+1)^2\sqrt{a+1}}\right]=\frac{2\pi a^2}{15(a+1)^{\frac{5}{2}}}$$

令$V(a)=\dfrac{2\pi a^2}{15(1+a)^{\frac{5}{2}}}$，

$$\therefore V'=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a(1+a)^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{2}a^2(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a(1+a)-\frac{5}{2}a^2}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}=\frac{\pi(4a+4a^2-5a^2)}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}$$

$$=\frac{\pi(4a-a^2)}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}=\frac{\pi a(4-a)}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}$$

令$V'=0$得$a=4$或$a=0$（舍）

$\therefore x=4$是唯一驻点，也即为最大值点

$$\because V(4)=\frac{32\pi}{15\cdot 5^{\frac{5}{2}}}=\frac{32\pi}{15\cdot 5^2\cdot\sqrt{5}}=\frac{32\sqrt{5}\pi}{1875}$$

21.证明：令$F(x)=xe^{1-x}f(x)$

$\because f(x)$在$\left[0,\dfrac{1}{k}\right]$上连续，$\therefore$由定积分中值定理得：存在$\eta\in\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$使得，

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx=k\left(\frac{1}{k}-0\right)\eta e^{1-\eta}f(\eta)=F(\eta)$$

又$F(1)=f(1)$，即$F(\eta)=F(1)$

$\because F(x)$在$[\eta,1]$上连续，在$(\eta,1)$内可导

由罗尔定理得：存在$\xi\in(\eta,1)$，使得$F'(\xi)=0$,即 $f'(\xi)=2(1-\xi^{-1})f(\xi)$