

## 期末考试试卷

### 一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设  $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$ ,  $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$ ,  $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$ , 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 ( )

- A.  $a_1, a_2, a_3$       B.  $a_2, a_3, a_1$       C.  $a_2, a_1, a_3$       D.  $a_3, a_2, a_1$

2. 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax + b}{x^{2n} + 1}$  在  $(-\infty, +\infty)$  连续, 则  $a, b$  的值分别是 ( )

- A.  $a = 1, b = 0$       B.  $a = 1, b = \frac{1}{2}$       C.  $a = 0, b = 1$       D.  $a = \frac{1}{2}, b = 1$

3.  $x = 0$  是下列哪一条曲线的垂直渐近线 ( )

- A.  $y = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$       B.  $y = \frac{|x|(x+1)}{x^3 - x}$       C.  $y = \frac{1}{\frac{x}{e^{x-1}} - 1}$       D.  $y = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$

4. 设函数  $f(x, y)$  连续, 则  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = ( )$

A.  $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

B.  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$

C.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta + \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

D.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

5. 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^a}$  绝对收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-a}}$  条件收敛, 则  $a$  的取值范围是

( )

- A.  $0 < a \leq \frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{2} < a \leq 1$       C.  $1 < a \leq \frac{3}{2}$       D.  $\frac{3}{2} < a < 2$

### 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 已知  $f(x^2 - 2x + 2)$  定义域是  $[0, 3]$ , 则  $f(x)$  定义域是\_\_\_\_\_.

7. 设函数  $y = f(x)$  由方程  $y - x = e^{x(1-y)}$  确定, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 设函数  $f(u, v)$  可微,  $z = z(x, y)$  由方程  $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$  确定, 则  $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 已知  $f(2) = \frac{1}{2}, f'(2) = 0, \int_0^2 f(x) dx = 1$ , 则  $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每题 6 分, 共 48 分)

11. 已知极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}) = 2$ , 求常数  $a, b$  的值

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a \sin^2 x + b \sin x + c, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^k \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续可微, 讨论常数

$a, b, c$  以及  $k$  的取值

13. 求不定积分  $\int \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

14. 设  $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ , 求函数  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  的表达式

15. 求过点  $(1, 2, 1)$  且与  $L_1: \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$  和  $L_2: \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$  平行的平面方程

16. 求微分方程  $y'' - y' = e^{-x} + \sin x$  的通解

---

17. 计算  $I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$ , 其中  $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

18. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$  的收敛域及和函数

四、应用题 (本大题共 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

19. 求函数  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  的单调区间、凹凸区间、拐点及渐近线

20. 设曲线  $y = ax^2 (a > 0, x \geq 0)$  与  $y = 1 - x^2$  交于点  $A$ , 过坐标原点  $O$  和点  $A$  的直线与曲线  $y = ax^2$  围成一平面图形, 问  $a$  为何值时, 该图形绕  $x$  轴旋转一周所得的旋转体体积最大? 最大体积是多少?

五、证明题 (本大题共 1 小题, 共 8 分)

21. 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 在区间  $(0, 1)$  内可导, 且满足

$f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx, (k > 1)$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 2(1 - \xi^{-1})f(\xi)$